Trošku o metrice:

1. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):

   (i) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (ii) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (iii) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   (iv) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

2. Zkuste definovat : posloupnost je v metrickém prostoru (M,d) cauchyovská.
   Ukažte, že platí: Posloupnost $\{a_n\}$, $a_n \in R^n$ je konvergentní právě když je cauchyovská.
3. Ukažte, že platí: Z každé omezené posloupnosti $\{a_n\}, a_n \in R^n$ lze vybrat posloupnost konvergentní .
4. Množina $M \subset R^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená v R^n .

Funkce více proměnných:

1. Definiční obory funkcí více proměnných:
   Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout.
   Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranicí zkoumaného definičního oboru.

   $f(x,y)=x+\sqrt{y}$; $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$;

   $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$;

   $f(x,y)=\ln(x+y)$; $f(x,y)=\ln(xy)$; $f(x,y)=\ln(xy-1)$; $f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}$;

   $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)$; $f(x,y)=\log(y-x^2)$; $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x+1}$;

   $f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$;

   $f(x,y,z)=\dfrac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}$.

2. „Grafy" funkcí dvou proměnných:
   (pokuste se představit si „podobu" grafu např. pomocí „vrstevnic" a řezů třeba rovinou $x=0$)

   $f(x,y)=-2$; ; $f(x,y)=1-y$; $f(x,y)=2-x-y$;

   $f(x,y)=x^2+1$; $f(x,y)=4-y^2$; $f(x,y)=x^2+y^2$; $f(x,y)=x^2+y^2+1$; $f(x,y)=1-(x^2+y^2)$;

   $f(x,y)=x^2+4y^2$; $f(x,y)=y^2-x^2$;

   $f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}$; $f(x,y)=-\sqrt{4-(x^2+y^2)}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

   $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$;

   $f(x,y)=\exp(x^2-y)$; $f(x,y)=\log(y-x^2)$

3. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$; b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$; b) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$;

d) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

5. „Mechanické“ derivování:

Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu následujících funkcí (všude, kde existují) a ukažte, že smíšené derivace 2.řádu jsou záměnné:

a) $f(x,y):=\quad x^2+y$; x^2y; $x\sqrt{y}+\dfrac{y}{x}$; e^{x^2-y} ; e^{x^2y} ; $e^{-\frac{x}{y}}$; x^y ; $\ln(xy-1)$; $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $arctg\dfrac{x+y}{x-y}$;

b) $f(x,y,z):=\quad xy+yz+xz$; e^{xyz}; $x^{\frac{y}{z}}$; $\arcsin(\dfrac{z^2}{x^2+y^2})$;

c) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

(Laplaceova rovnice).

6. Diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log(y-x^2)$ je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1,2,0)$.
Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně $\log(1{,}99-(1{,}02)^2)$.

b) Určete, kde má funkce $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$ diferenciál a diferenciál v těchto bodech určete.

c) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

d) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.